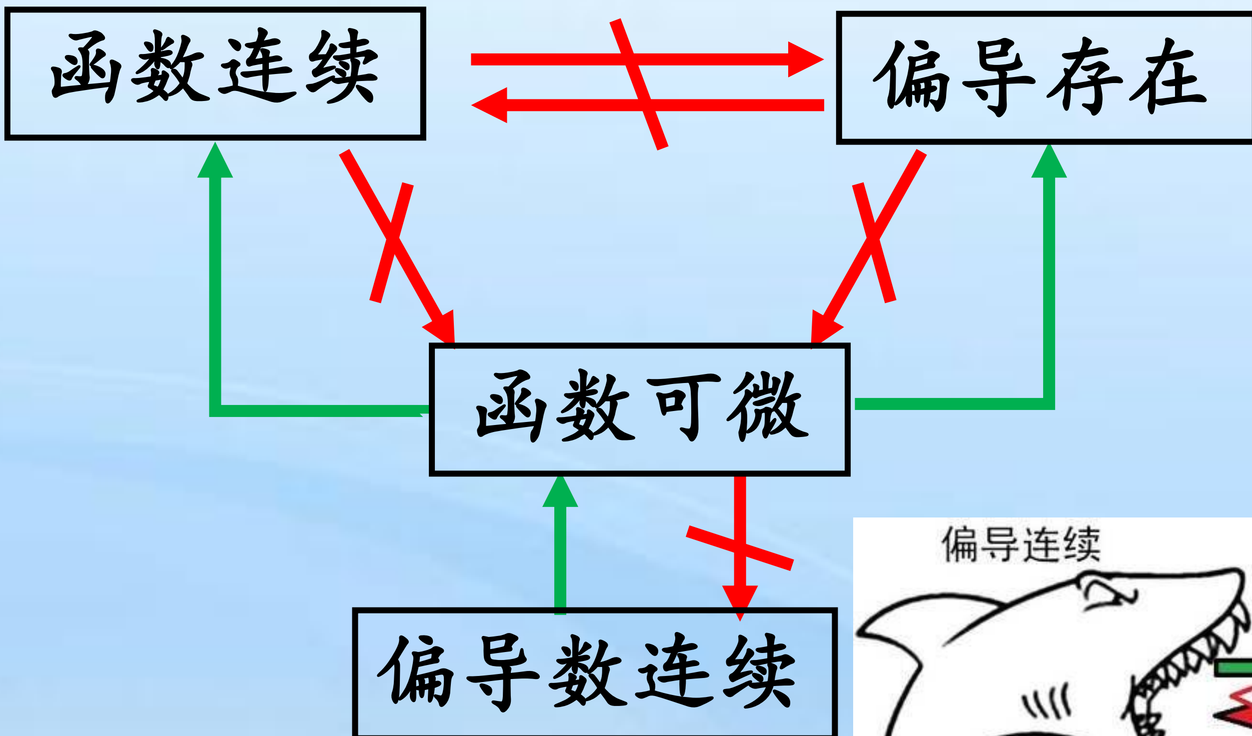
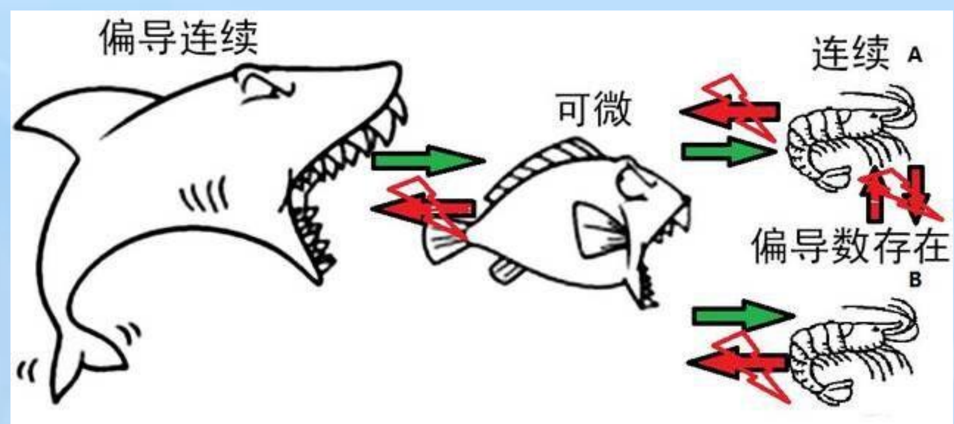
高等数学 A(I)下 期末复习

2021.6

一、多元函数微分学及其应用（20%左右）

1、多元函数的连续、偏导存在、可微性的讨论





例1、(1)、证明函数$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$在$(0,0)$连续，但偏导不存在；

(2)、证明函数$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

在$(0,0)$偏导存在，但不连续。

证：(1) 取 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{\rho\to0}\sqrt{\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\lim_{\rho\to0}\rho=0=f(0,0)$$

故函数在(0,0)处连续.

但 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 极限不存在

同理，$f_y(0,0)$也不存在.

(2) $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0,$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{0}{\Delta y}=0,$

故函数在(0,0)处偏导存在.

但 $\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{x^2(1+k^2)}=\dfrac{k}{(1+k^2)},$ k 值不同，极限不同

故函数在(0,0)处不连续.

2、多元抽象复合函数的一阶、二阶偏导数

例2、设 $z=f(xy,\frac{x}{y})+g(x\ln y)$, f 具有二阶连续偏导数，

g二阶可导,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+f_2'\frac{1}{y}+\ln y\cdot g'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[f_{11}''x+f_{12}''(-\frac{x}{y^2})]-\frac{1}{y^2}f_2'$$

$$+\frac{1}{y}[f_{21}''x+f_{22}''(-\frac{x}{y^2})]+\frac{1}{y}\cdot g'+\ln y\cdot g''\cdot\frac{x}{y}$$

$$=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''++\frac{1}{y}\cdot g'+\frac{x}{y}\ln y\cdot g''$$

3、会求空间曲面的切平面及与法线

曲面方程：

(1) $F(x,y,z)=0$ 法向量 $\vec{n}=(F_x',F_y',F_z')\Big|_{M_0}$

(2) $z=f(x,y)$ 法向量 $\vec{n}=\pm(f_x,f_y,-1)\Big|_{M_0}$

例3、求曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的切平面方程.

解：令 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$

$F_x'\Big|_{(1,1,1)}=4x\Big|_{(1,1,1)}=4,$ $F_y'\Big|_{(1,1,1)}=6y\Big|_{(1,1,1)}=6,$

$F_z'\Big|_{(1,1,1)}=2z\Big|_{(11,1)}=2,$ $\therefore\ \vec{n}=\{2,3,1\}$

切平面方程： $2(x-1)+3(y-1)+(z-1)=0$

即 $2x+3y+z=6$

4、会求方向导数与梯度

对于三元函数：梯度 $\operatorname{grad} f=(f_x, f_y, f_z)$

方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=f_x\cos\alpha+f_y\cos\beta+f_z\cos\gamma$

例4、求函数$u=xy+e^z$ 在点 $A(2,1,2)$ 的梯度，及沿A 点指向$B(4,-1,3)$ 方向的方向导数.

解：$\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$， $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{3}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_A=y\Big|_{(2,1,2)}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_A=x\Big|_{(2,1,2)}=2,\ \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_A=e^z\Big|_{(2,1,2)}=e^2$$

$$\operatorname{grad} u\Big|_{(2,1,2)}=(u_x, u_y, u_z)\Big|_{(2,1,2)}=(1,2,e^2)$$

$$\therefore\ \frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\frac{e^2-2}{3}$$

5、二元函数的极值

(1) 求驻点：即解方程组 $f_x(x,\ y)=0$，

$f_y(x,\ y)=0$；

(2) 判别：在每个驻点处求A,B,C， 然后依 $AC-B^2$ 的符号来判别：

$$AC-B^2>0 \text{有极值} \begin{cases} A>0, & \text{极小值} \\ A<0, & \text{极大值} \end{cases}$$

$$AC-B^2<0 \text{无极值}$$

例5、求函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+y)$ 的极值.

解：先解方程组 $\begin{cases} f_x = e^{2x}(2x+2y^2+2y+1)=0, \\ f_y = e^{2x}(2y+1)=0. \end{cases}$

求得驻点为 $P(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$

$$A = f_{xx}(x,y)\big|_P = 4e^{2x}(x+y^2+y+1)\big|_P = 2e^{-\frac{1}{2}}$$

$$B = f_{xy}(x,y)\big|_P = e^{2x}(4y+2)\big|_P = 0$$

$$C = f_{yy}(x,y)\big|_P = 2e^{2x}\big|_P = 2e^{-\frac{1}{2}}$$

$AC-B^2>0$, 且 $A>0$,

$f(x,y)$ 取得极小值：$f(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

二、重积分（20%左右）

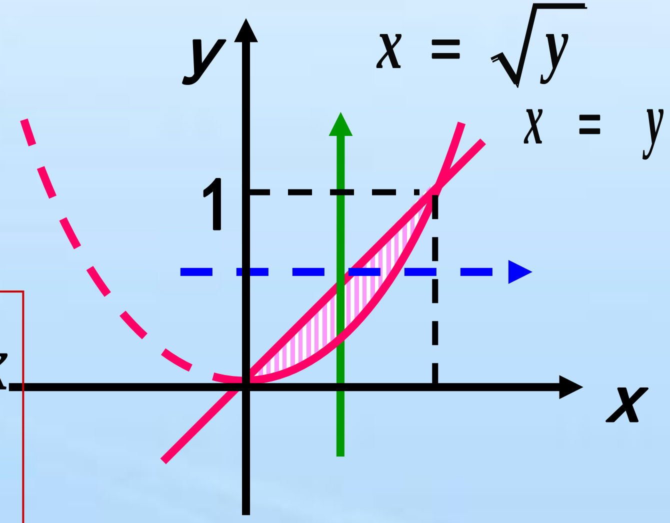
1、选取适当的坐标系计算二重积分；会交换积分次序，会坐标系互相转换

例1、交换积分次序 $I=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

解： $I=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$

$D:\begin{cases} y\le x\le\sqrt{y} \\ 0\le y\le 1\end{cases}$ $\Rightarrow D:\begin{cases} x^2\le y\le x \\ 0\le x\le 1\end{cases}$



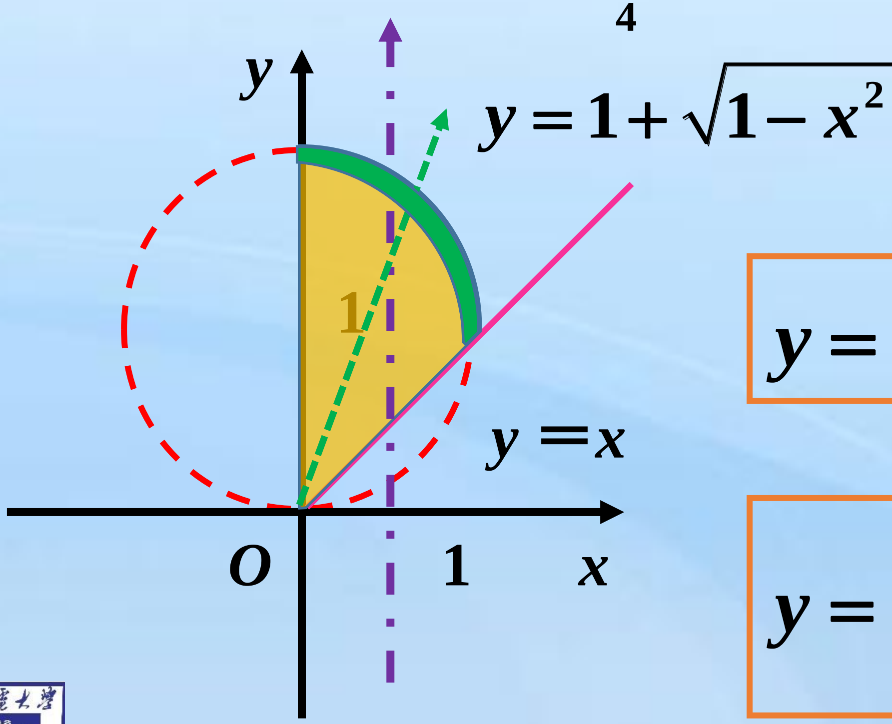
练习：$\int_{-1}^0 dx\int_{-1}^{2x+1} f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_{2x-1}^{1} f(x,y)dy$

答案：$\int_{-1}^{1} dy \int_{\frac{y-1}{2}}^{\frac{y+1}{2}} f(x,y)dx$

例2 将$\int_0^1 dx \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$化为极坐标下的二次积分.

解：

$$原式 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$



$$y = 1 + \sqrt{1-x^2} \leftrightarrow \rho = 2\sin\theta$$

$$y = x(x \geq 0) \leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

例 3、计算 $I=\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中 $D: x^2+y^2\le 1$.

解：利用极坐标

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \ln(1+\rho^2)\rho d\rho$$

$$=2\pi\frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+\rho^2)d(1+\rho^2)$$

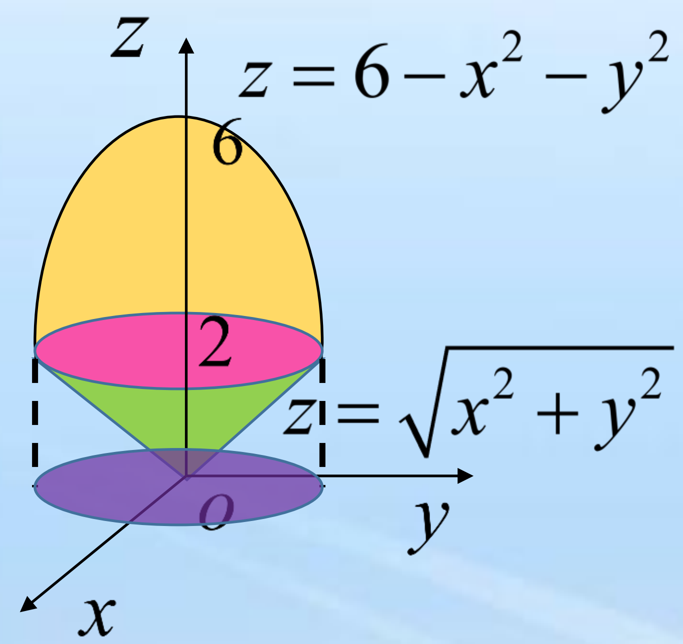
$$=\pi[(1+\rho^2)\ln(1+\rho^2)\Big|_0^1-\int_0^1 2\rho d\rho]$$

$$=\pi[2\ln 2-1]$$

2、会把三重积分化为柱面坐标、球面坐标下的三次积分，会选取适当的坐标系计算三重积分

例4、1）设Ω是曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=6-x^2-y^2$所围成，

把$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv$化为柱坐标系下的三次积分为____



解： $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 6-x^2-y^2$

$D_{xy}:x^2+y^2\le 4$

$\Omega:\quad \rho\le z\le 6-\rho^2$

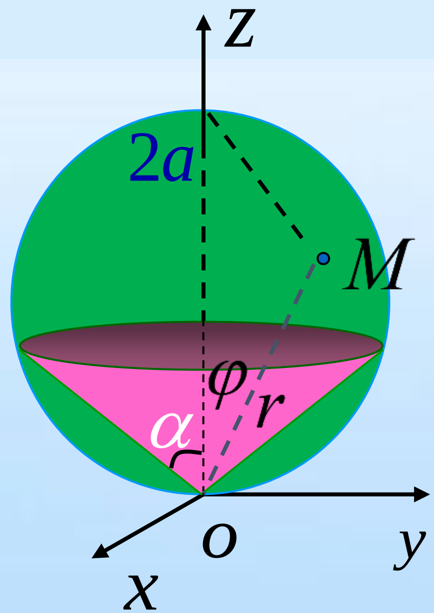
$0\le\rho\le 2,0\le\theta\le 2\pi$

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_\rho^{6-\rho^2} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\,dz$$

(2) Ω : 球面$x^2+y^2+z^2=2az$及锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围区域，

(含z轴的部分)在球面坐标下化如下三重积分为三次积分

$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$



$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\cos\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

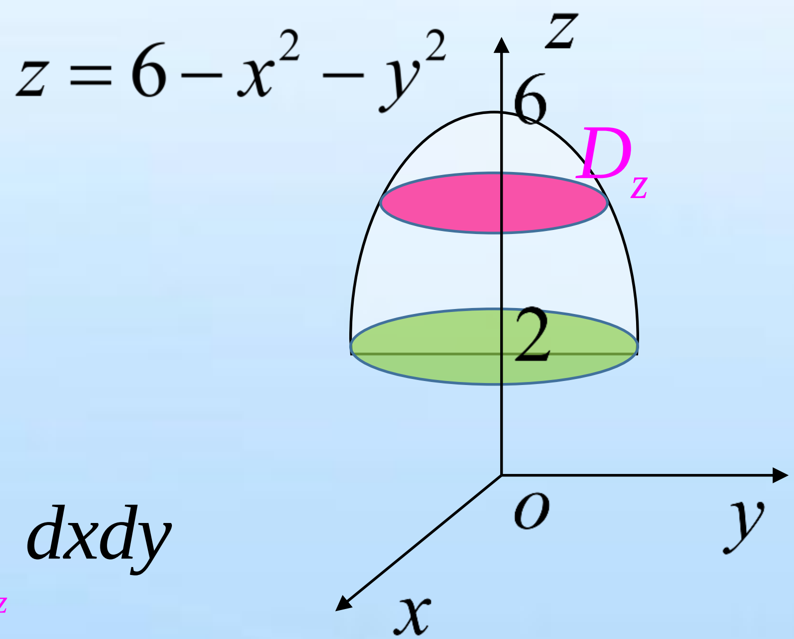
解： $\Omega : \begin{cases} 0 \le r \le 2a\cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\, r^2\sin\varphi\, dr$$

（3）设Ω是曲面 $z=6-x^2-y^2$ 与平面 $z=2$ 所围，

计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z^3 dxdydz$.

解： 利用截面法



$$\Omega:\begin{cases} 2\le z\le 6 \\ D_z: x^2+y^2\le 6-z \end{cases}$$

$$\iiint_{\Omega} z^3 dxdydz=\int_2^6 z^3 dz\iint_{D_z} dxdy$$

$$=\int_2^6 z^3\pi(6-z)dz=\cdots$$

三、线面积分（22%左右）

1、掌握两类曲线积分的计算.（直接计算化为定积分）

对弧长的曲线积分：(一代、二换、三定限)

1) $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

2) $L: y=\psi(x),\ a \le x \le b$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}dx$$

3) $L: r=r(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta]\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$$

对坐标的曲线积分：(一代、二定限)

1) $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \quad t:\alpha\to\beta$ （下限-起点，上限-终点）

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\,\mathrm{d}t$$

2) $L: y=\psi(x),\ x:a\to b$

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\psi'(x)\}\,\mathrm{d}x$$

例1、计算 $I=\int_L (x+3y)^2 ds$，其中$L: y=\dfrac{2}{3}(x+1)\ \ (-1\le x\le 2).$

解一：直角坐标方程

$$I=\int_{-1}^{2}[x+2(x+1)]^2\sqrt{1+(\frac{2}{3})^2}dx$$

$$=\frac{\sqrt{13}}{3}\int_{-1}^{2}(3x+2)^2dx=\frac{\sqrt{13}}{27}(3x+2)^3\Big|_{-1}^{2}=19\sqrt{13}$$

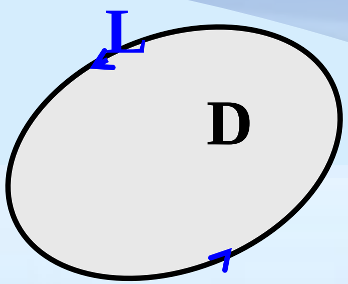
解二：参数方程 $L:\begin{cases} x=-1+3t \\ y=2t \end{cases}\quad 0\le t\le 1$

$$I=\int_{0}^{1}(-1+3t+6t)^2\sqrt{3^2+2^2}dt$$

$$=\sqrt{13}\int_{0}^{1}(-1+9t)^2dt=\frac{\sqrt{13}}{27}(-1+9t)^3\Big|_{0}^{1}=19\sqrt{13}$$

2、格林公式的应用

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$



练习：若$L: x^2 + y^2 = a^2$为逆时针方向，则求 $I = \oint_L \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$

解：$I = \oint_L \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{a^2} = \frac{1}{a^2}\iint_D [1-(-1)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$= \frac{1}{a^2} 2\pi a^2 = 2\pi.$

3、运用积分与路径无关的条件计算曲线积分

例2、计算积分$\int_L (e^x\cos y+2xy^2)dx+(2x^2y-e^x\sin y)dy$

若L是摆线$x=t-\sin t, x=1-\cos t$上从$A(0,0)$到$B(\pi,2)$的一段弧.

解： 易验证 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=4xy-e^x\sin y$

曲线积分与路径无关 可换新积分路径为折线

$$\text{原式}=\int_{(0,0)}^{(\pi,2)}(e^x\cos y+2xy^2)dx+(2x^2y-e^x\sin y)dy$$

$$=\int_0^\pi e^x dx+\int_0^2(2\pi^2 y-e^\pi\sin y)dy$$

$$=4\pi^2+e^\pi\cos 2-1$$

4、两类曲面积分的直接计算（化为二重积分）

(1)设Σ：$z=z(x, y)$，$(x, y)\in D_{xy}$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$$

对面积的曲面积分：一代、二换、三投影

(2)
$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

对坐标的曲面积分：一投、二代、三定号

例3、$\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$，则$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(y^2+2z^2)dS=$ $\underline{4\pi R^4}$

解：利用轮换对称

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x^2 dS=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} y^2 dS=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} z^2 dS=\frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$$

$$\text{原式}=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} R^2 dS=4\pi R^4$$

注意：1、利用曲面方程化简被积函数

2、对称性的应用

5、用高斯公式计算曲面积分

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

这里 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧

例4. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3+z^2)dydz+(y^3+x^2)dzdx+(z^3+y^2)dxdy$

Σ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

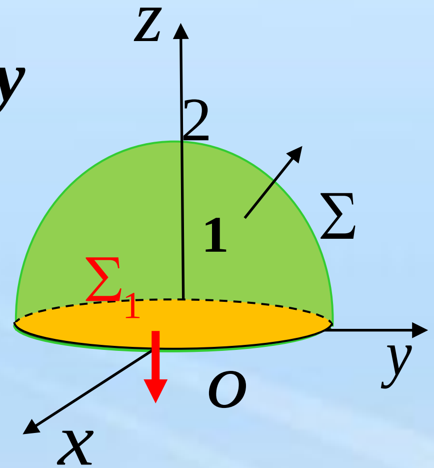
解: 补面 $\Sigma_1: z=0, (x,y)\in D: x^2+y^2\le 1$, 取下侧

$$原式=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\ dxdydz-\iint\limits_{\Sigma_1}$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2dr+\iint\limits_{D}y^2dxdy$$

$$=\frac{6}{5}\pi+\frac{1}{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\frac{6}{5}\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\rho d\rho=\frac{29}{20}\pi$$



四、无穷级数（22%左右）

1、数项级数收敛的定义、性质；正项级数的比较、比值、根值判别法；交错级数的莱布尼茨判别法;任意项级数的绝对收敛、条件收敛

例1、判断下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}[\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$$

故原级数收敛．

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

解： $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}<1$ 故原级数收敛

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 解： $\because\ \frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

$\therefore\ \sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n-\ln n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ 发散, 即原级数非绝对收敛

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 是交错级数, $\therefore\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1/n}{1-\ln n/n}=0,$

$\because\ f(x)=x-\ln x\quad(x>1),\ f'(x)=1-\frac{1}{x}>0\quad(x>1),$

故 $\left\{\frac{1}{n-\ln n}\right\}$ 当 $n>1$ 时单减, 由莱布尼茨定理:

所以此交错级数收敛, 故原级数是条件收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

解： $\because \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 绝对收敛.

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$发散

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

解： $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散.

2、会求幂级数的收敛半径、收敛域及和函数

例2、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n}x^n$的收敛域及和函数.

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)(n+2)}\middle/\frac{1}{n(n+1)}\right| = 1 \quad \therefore R = 1$

当$x = 1, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n}$收敛，$x = -1, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)n}$收敛，收敛域 $[-1,1]$.

设$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n}x^n, x \in [-1,1] \qquad S(0) = 0$

则$xS(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n}x^{n+1}, x \in [-1,1]$

$$(xS(x))' = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n}x^{n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)n}x^{n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}dx = \int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)dx = \int_0^x\frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-x) \quad x \in (-1,1)$$

$$xS(x)=\int_0^x -\ln(1-x)dx+0=x+(1-x)\ln(1-x),\ x\in[-1,1)$$

$$S(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x} & x\in[-1,0)\cup(0,1) \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}[1+\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}]$$

$$=1+\lim_{x\to1^-}(1-x)\ln(1-x)=1$$

$$S(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x} & x\in[-1,0)\cup(0,1) \\ 0 & x=0 \\ 1 & x=1 \end{cases}$$

解法二: $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\ x\in[-1,1),$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1},\quad xg(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},\qquad x\in[-1,1),$$

$$(xg(x))'=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1})'=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^{n+1}}{n+1})'=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},\quad x\in(-1,1)$$

$$xg(x)=\int_0^x\frac{x}{1-x}dx+0=-\ln(1-x)-x,\quad x\in[-1,1)$$

$$g(x)=-1-\frac{\ln(1-x)}{x},\quad x\in[-1,0)\cup(0,1)$$

$$S(x)=\begin{cases}1+\dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x} & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1$$

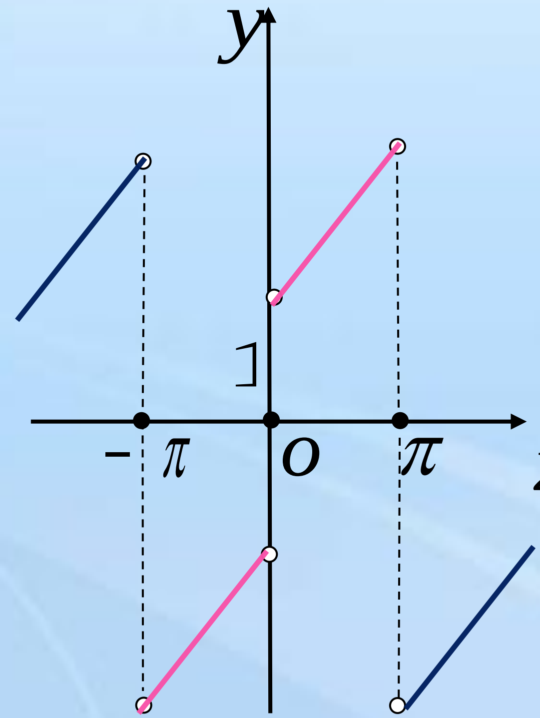
$$S(x)=\begin{cases}1+\dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x} & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 0 & x=0\\ 1 & x=1\end{cases}$$

3、将定义在[- π , π]上的函数展开成以2π为周期的傅里叶级数，并写出收敛区间。

例3、将 $f(x)=\begin{cases} x+\pi, & 0\le x\le\pi, \\ x-\pi, & -\pi<x<0 \end{cases}$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数.

解：将$f(x)$周期延拓成$F(x)$, 因为$F(x)$是奇函数，所以 $a_n=0$

$(n=0,1,2,\cdots)$



$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\pi)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(x+\pi)\,\mathrm{d}\cos nx$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[(x+\pi)\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}\,x\right]$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[(x+\pi)\cos nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= -\frac{2}{n}[2(-1)^n - 1] = \begin{cases} \dfrac{6}{2k-1}, & n = 2k-1, \\ -\dfrac{1}{k}, & n = 2k. \end{cases}$$

当$x = -\pi,\ \pi$时，级数收敛于零.

$$f(x) = 6\sin x - \sin 2x + 2\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x + \cdots$$

$$+\frac{6}{2k-1}\sin(2k-1)x - \frac{1}{k}\sin 2kx + \cdots \quad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$$

傅里叶级数公式：$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)$

注：若定义在[- π , π]上的函数是偶函数，则周期延拓后展开成以2π为周期的余弦级数$(b_n = 0)$.

五、复变函数（16%左右）

1、掌握复变函数利用C-R方程判别可导及解析性的方法，并求导数

例1、若 $f(z)=(x+ay)+i(x+y)$ 处处解析，则常数 $a=$ <u>−1</u> .

例2、判别函数 $f(z)=(x^3-y^3)+2x^2y^2i$ 的可导性和解析性.

解：$u(x,y)=x^3-y^3$, $v(x,y)=2x^2y^2$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=3x^2 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-3y^2 \quad \frac{\partial v}{\partial x}=4xy^2 \quad \frac{\partial v}{\partial y}=4x^2y$$

四个偏导连续 $\Rightarrow u(x,y)v(x,y)$ 可微

仅在 $(0,0)$ 和 $\left(3/4, 3/4\right)$ 时才满足C-R 方程

$\therefore$ $f(z)$ 仅在 $z=0$ 和 $z=3(1+i)/4$ 处可导，处处不解析.

2、掌握复变函数沿闭曲线的积分

闭路积分：$\oint_C f(z)dz$

利用留数定理计算

留数计算规则 $\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$

1、若z_0是$f(z)$的一级极点$\Rightarrow$

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0}(z - z_0) f(z)$$

2、若z_0是$f(z)$的二级极点$\Rightarrow$

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0}[(z - z_0)^2 f(z)]'$$

例3、计算 $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{(z+1)(2z+1)^2}dz$，曲线取正向.

解：$f(z)$在$|z|=2$内有一个一级极点$z=-1$，一个二级极点$z=-\frac{1}{2}$

$$\text{原式}=2\pi i[\operatorname{Res}(f(z),-1)+\operatorname{Res}(f(z),-\frac{1}{2})]$$

$$=2\pi i\{\lim_{z\to-1}[(z-(-1))\frac{e^z}{(z+1)(2z+1)^2}]$$

$$+\lim_{z\to-\frac{1}{2}}[(z-(-\frac{1}{2}))^2\frac{e^z}{(z+1)(2z+1)^2}]'\}$$

$$=2\pi i\{\lim_{z\to-1}[\frac{e^z}{(2z+1)^2}]+\frac{1}{4}\lim_{z\to-\frac{1}{2}}[\frac{e^z}{(z+1)}]'\}$$

$$=2\pi i\{\lim_{z\to-1}[\frac{e^z}{(2z+1)^2}]+\frac{1}{4}\lim_{z\to-\frac{1}{2}}[\frac{ze^z}{(z+1)^2}]\}=2\pi i(e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$$

3、会将在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的解析函数展开为洛朗级数

例4、将 $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ 在以下圆环域内展开成洛朗级数.

$$\boxed{\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n, \quad (|z| < 1)}$$

(1) $1 < |z-3| < \infty$

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{(z-3)} \cdot \frac{1}{1+(z-3)}$$

$$= \frac{1}{(z-3)^2} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{1}{z-3}} = \frac{1}{(z-3)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z-3)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+2}}$$

(2) $3<|z|<+\infty$

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{1}{2-z}-\frac{1}{3-z}$$

$$=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n,\quad (|z|<1)}$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{z^{n+1}}$$

(3) $0<|z-2|<1$

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{1}{(z-2)}\cdot\frac{-1}{1-(z-2)}$$

$$=\frac{-1}{z-2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-2)^{n-1}$$

认真复习同步练习册，

学有余力的同学复习同步学习指导